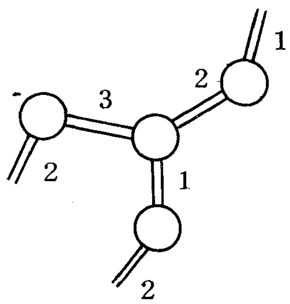
$$\begin{vmatrix} 1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & -p_z \\ -p_1 & 1 & \vdots & & -p_z \\ -p_1 & -p_2 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

枝分れ高分子の相変化

阪大工　庄　司　一　郎

模型的に考えて，抗原にはｆ個の違った「穴」があいていると考え，これにｆ種類の抗体の各々が結合できると考える。抗体は棒状で両端が抗原の「穴」にはさまれることができると考える。これらが相結合して右図のように「分子」を作ると考える。この「分子」が「巨大分子」になりうるためには抗原，抗体の数の割合がどのようにあればよいかなどを考える。これらは「木」のような形をしていると考えるので，いわゆる「ベーテ格子」上に配布されていると考えられる。抗原の数Ｎ，各抗体の数 N_k（ k＝1，2，－f ），それに分子数Ｍを一定とする条件のもとにエントロピー極大の原理より最確分布



第１図　木（n＝3，$\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$，$i_1=1$，$i_2=2$，$i_3=0$）

$$\mathscr{M}_n\left\{\begin{matrix}\ell_1\ell_2,\ell_f\\ i_1 i_2, i_f\end{matrix}\right\}=c\,n^{f-2}\prod_{k=1}^{f}\frac{(n-\ell_k-1)!}{\ell_k!\,i_k!\,(n-2\ell_k-j_k)!}\,x_1^{n_1}y_2^{n_2}\cdots x_f^{n_f}\,y^{n}$$

がきまる。ここで上式は抗原の数が n， k 種の抗体を n_k 個ふくみその中 ℓ_k 個は抗原を結びつける役目をし， i_k 個は抗原に一方だけがついている（$k=1, 2, \cdots f$）ような「分子」の数をあらわしている。もちろん $\sum_k \ell_k = n-1$ である。

さて p_k をもって， k 種の「穴」の中，ひっついたものの割合とし $r_k = N/2N_k$ とするとあきらかに

$$p_k \leqq 1/r_k \tag{1}$$

また $p = \sum_k p_k/f$， $r = fN/2\Sigma N_k = f/\Sigma\frac{1}{r_k}$ として，

$$p \leqq 1/r \tag{1'}$$

また $p = (\Sigma N_k + N - M)/fN$ ともかけて，〔穴が一つふさがるごとに分子数は一つへる〕

$M \geqq 1$ という条件は

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{2r} \geqq P \tag{2}$$

となる。さらに若干の計算ののち $\langle n^2\rangle$，$\langle n_k^2\rangle$，… が発散する点として

$$\sum_k \frac{p_\kappa^2}{\frac{1}{r_k}+p_\kappa^2} = 1 \tag{3}$$

という式を得る。左辺は 1 より大きくは成り得ない。

とくに各種の抗体が等量のときは，

$$f\,p^2/\left(\frac{1}{r}+p^2\right) = 1$$

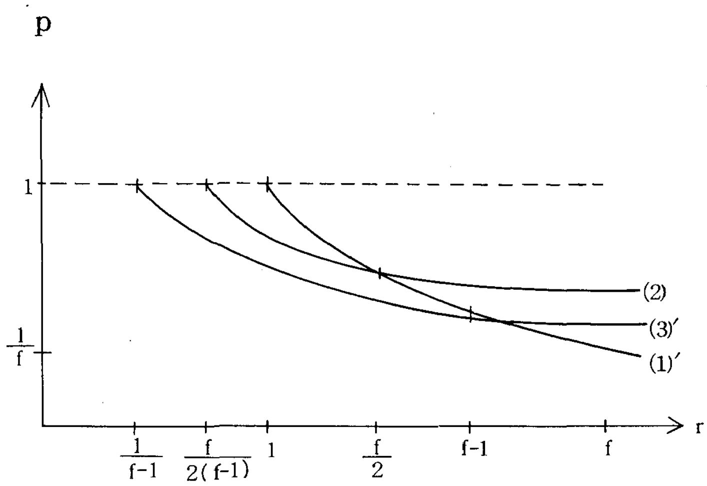
より，これより

$$p = \frac{1}{\sqrt{f-1}}\,\frac{1}{\sqrt{r}} \tag{3'}$$

p と r との関係を示す。(1)′，(2)，(3)′ を図示して，(3)′ に到達できるのは

$$\frac{1}{f-1} < r < f-1$$

に限る。これはベーテ格子の critical percolation が「サイト問題」についても，1／(f−1) であることと対応している。また最近宮島らが論じた異方性ベーテ格子の critical percolation の問題の解



第２図　p と r の関係式

$$\Sigma \frac{\tilde{p}_i}{1+\tilde{p}_i} = 1 \tag{4}$$

に対応して，この場合は (3) で $p_k \leqq 1/r_k$ とおくと，

$$\sum_k \frac{1}{r_k+1} \leqq 1$$

で $\tilde{p}_i = 1/r_i = 2N_i/N$ とおけば一致する。

また $r_i < 1$ の領域では $p_i \leqq 1$ とおいて (3) は

$$\sum_k \frac{1}{1/r_k+1} \leqq 1$$

でこの領域では $\tilde{p}_i = r_i$ とおくとやはり等号の極限では (4) に一致する。

ここに書いたものは，Biken Journal（阪大微研報告） 5 (1962) 259 に発表したもので〔共著者　天野，徳永，佐藤〕ベーテ格子研究会のために再集したものである。